선형모델 - linear model

In [1]:

```
from IPython.display import display, Image
```

학습 내용

- 샘플의 특성이 104개인 것을 활용하여 릿지 회귀, 라쏘 회귀에 대해 알아본다.
- 라쏘 회귀(Lasso Regression) - L1에 대해 실습을 통해 알아본다.
- 릿지 회귀(Ridge Regression) - L2에 대해 실습을 통해 알아본다.
- 라쏘 회귀(Lasso Regression)의 alpha의 변경
- 릿지 회귀(Ridge Regression)의 alpha의 변경

회귀 모델은 특성이 많아질수록 선형 모델의 성능이 높아져 과대적합(Overfitting)이 될 가능성이 높아짐.

모델에 제한을 두기(규제)

- (1) 라쏘 회귀 - 실제로 **계수를 0으로** 만든다. (L1규제)

  y = w1 * x1 + w2 * x2 + b (w1, w2가 계수)

- (2) 릿지 회귀 - 모델에서의 **계수를 0에 가깝게** 만든다. (L2규제)

릿지 회귀(Ridge) - L2규제

- 릿지 회귀에서의 가중치(w) 선택은 훈련 데이터를 잘 예측하기 위한 하나와 추가 제약 조건을 만족시키기 위한 목적
- **가중치의 절대값**을 가능한 작게 만든다. w(기울기)의 모든 값이 0에 가깝게 되길 원한다. **(규제) - Regularization**
  - **모든 특성이 출력에 주는 영향을 작게** 만든다.
- 규제(Regularization)을 하는 이유 - 과대적합(Overfitting)이 되지 않도록 모델을 강제로 제한한다.
- 릿지 회귀의 규제 방식은 L2규제라고하기도 한다.
- 릿지 회귀는 **linear_model.Ridge**에 구현되어 있음.

In [2]:

```
import mglearn
```

In [3]:

```
from sklearn.datasets import load_boston
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler, PolynomialFeatures
from sklearn.linear_model import Ridge   # 릿지회귀
import pandas as pd
```

한글 설정

In [4]:

```
# 한글
import matplotlib
from matplotlib import font_manager, rc
font_loc = "C:/Windows/Fonts/malgunbd.ttf"
font_name = font_manager.FontProperties(fname=font_loc).get_name()
matplotlib.rc('font', family=font_name)
matplotlib.rcParams['axes.unicode_minus'] = False

%matplotlib inline
```

일반 회귀 모델 살펴보기

In [5]:

```
### 데이터 셋 준비
boston = load_boston()  # 데이터 셋 불러오기
print(type(boston.target), type(boston.data))
print(boston.target.shape, boston.data.shape)

df_boston = pd.DataFrame(boston.data,columns=boston.feature_names)
df_boston['target'] = pd.Series(boston.target)
df_boston.head()
```

```
<class 'numpy.ndarray'> <class 'numpy.ndarray'>
(506,) (506, 13)
```

Out[5]:

	CRIM	ZN	INDUS	CHAS	NOX	RM	AGE	DIS	RAD	TAX	PTRATIO	B	LS
0	0.00632	18.0	2.31	0.0	0.538	6.575	65.2	4.0900	1.0	296.0	15.3	396.90	
1	0.02731	0.0	7.07	0.0	0.469	6.421	78.9	4.9671	2.0	242.0	17.8	396.90	
2	0.02729	0.0	7.07	0.0	0.469	7.185	61.1	4.9671	2.0	242.0	17.8	392.83	
3	0.03237	0.0	2.18	0.0	0.458	6.998	45.8	6.0622	3.0	222.0	18.7	394.63	
4	0.06905	0.0	2.18	0.0	0.458	7.147	54.2	6.0622	3.0	222.0	18.7	396.90	

In [6]:

```
df_boston.loc[:, 'CRIM':'LSTAT'].shape
```

Out[6]:

```
(506, 13)
```

In [7]:

```
X = df_boston.loc[:, 'CRIM':'LSTAT']         # 입력 데이터
y = boston.target

print("정규화,확장 전 데이터 셋 : ", X.shape, y.shape)
```

정규화,확장 전 데이터 셋 : (506, 13) (506,)

In [8]:

```
normalize_X = MinMaxScaler().fit_transform(X)  # 입력 데이터 정규화
ex_X = PolynomialFeatures(degree=2, include_bias=False).fit_transform(normalize_X)  # 데이터 featur

print("정규화, 추가 생성 : ", ex_X.shape, y.shape)
```

정규화, 추가 생성 : (506, 104) (506,)

In [9]:

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression
```

일반 선형 회귀 모델을 이용한 학습 및 평가

In [10]:

```
X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(ex_X, y, random_state=42)
lr = LinearRegression().fit(X_train, y_train)

print("훈련 데이터 세트 점수 : {:.2f}".format(lr.score(X_train, y_train)))
print("테스트 데이터 세트 점수 : {:.2f}".format(lr.score(X_test, y_test)))
```

훈련 데이터 세트 점수 : 0.94
테스트 데이터 세트 점수 : 0.78

릿지(Ridge) 회귀 적용 : alpha = 1

In [11]:

```
# from sklearn.linear_model import Ridge
ridge = Ridge().fit(X_train, y_train)
print(ridge)
print("훈련 세트 점수 : {:.2f}".format(ridge.score(X_train, y_train)))
print("테스트 세트 점수 : {:.2f}".format(ridge.score(X_test, y_test)))
```

Ridge()
훈련 세트 점수 : 0.87
테스트 세트 점수 : 0.81

확인 결과

- **선형회귀는 과대적합**, Ridge는 규제로 인해 **과대적합이 적어진다.**
- alpha을 이용하여 훈련세트의 성능 대비 모델을 얼마나 단순화 시킬 수 있는지 지정 가능.(기본값 alpha=1.0)

- alpha의 계수를 높이면 w의 계수를 0에 가깝게 만든다. 계수가 0에 가까워지면 일반화에 도움이 된다.(훈련 세트 성능이 나빠짐)
- alpha의 게수를 줄이면 그만큼 풀리면서 LinearRegression 으로 모델과 점점 가까워짐

릿지(Ridge) 회귀 적용 : alpha = 10

In [12]:

```
ridge10 = Ridge(alpha=10).fit(X_train, y_train)
print(ridge10)
print("훈련 세트 점수 : {:.2f}".format(ridge10.score(X_train, y_train)))
print("테스트 세트 점수 : {:.2f}".format(ridge10.score(X_test, y_test)))
```

```
Ridge(alpha=10)
훈련 세트 점수 : 0.77
테스트 세트 점수 : 0.73
```

릿지(Ridge) 회귀 적용 : alpha = 0.1

In [13]:

```
ridge01 = Ridge(alpha=0.1).fit(X_train, y_train)
print(ridge01)
print("훈련 세트 점수 : {:.2f}".format(ridge01.score(X_train, y_train)))
print("테스트 세트 점수 : {:.2f}".format(ridge01.score(X_test, y_test)))
```

```
Ridge(alpha=0.1)
훈련 세트 점수 : 0.92
테스트 세트 점수 : 0.82
```

In [14]:

```
ridge001 = Ridge(alpha=0.01).fit(X_train, y_train)
```

릿지 회귀(Ridge)-alpha

A. 앞의 예제는 alpha를 10, 0.1, 0.01으로 이용
B. alpha는 모델을 얼마나 많이 규제할지 조절한다.

In [15]:

```
ridge_p = [10, 5, 1, 0.1, 0.01]

for i in ridge_p:
    ridge = Ridge(alpha=i).fit(X_train, y_train)

    print("alpha : {}".format(i))
    print("훈련 데이터 세트 점수 : {:.2f}".format(ridge.score(X_train, y_train)))
    print("테스트 데이터 세트 점수 : {:.2f}".format(ridge.score(X_test, y_test)))
```

```
alpha : 10
훈련 데이터 세트 점수 : 0.77
테스트 데이터 세트 점수 : 0.73
alpha : 5
훈련 데이터 세트 점수 : 0.80
테스트 데이터 세트 점수 : 0.76
alpha : 1
훈련 데이터 세트 점수 : 0.87
테스트 데이터 세트 점수 : 0.81
alpha : 0.1
훈련 데이터 세트 점수 : 0.92
테스트 데이터 세트 점수 : 0.82
alpha : 0.01
훈련 데이터 세트 점수 : 0.94
테스트 데이터 세트 점수 : 0.81
```

In [16]:

```
display(Image(filename='img/ridge01.png'))
```

$$J(\theta) = MSE(\theta) + \alpha \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{c} \theta_i^2$$

In [17]:

```
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

In [18]:

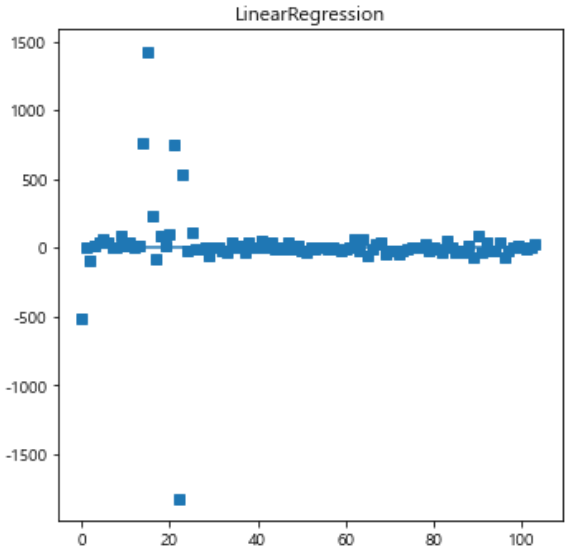
```
lr = LinearRegression().fit(X_train, y_train)
ridge01 = Ridge(alpha=0.1).fit(X_train, y_train)
ridge001 = Ridge(alpha=0.01).fit(X_train, y_train)
ridge0001 = Ridge(alpha=0.001).fit(X_train, y_train)
```

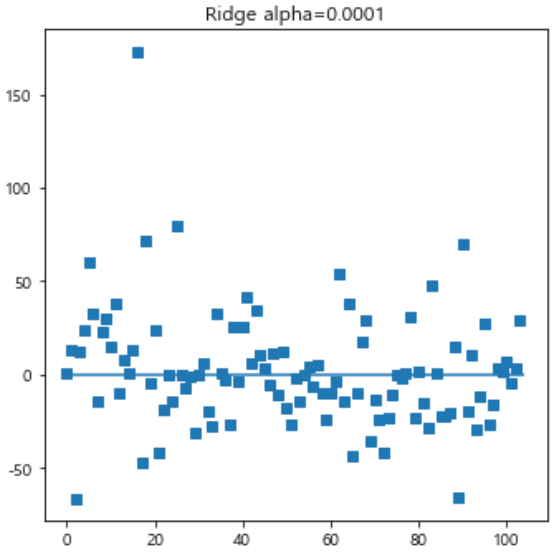
In [19]:

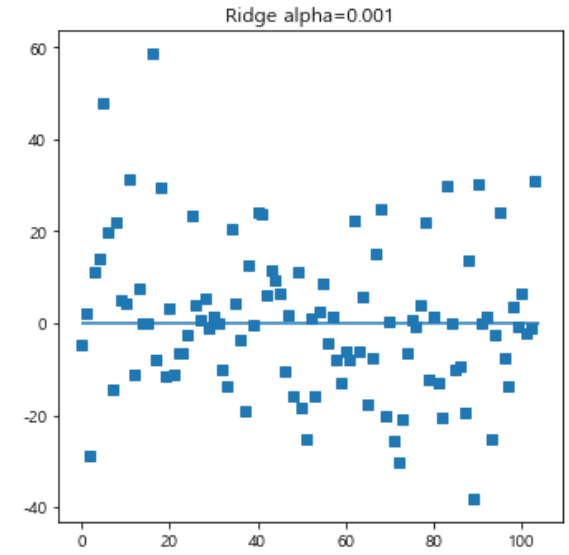
```
fig = plt.figure(figsize=(12,12))

plt.subplot(2, 2, 1)
plt.hlines(0,0, len(lr.coef_))
plt.plot(lr.coef_, 's', label="LinearRegression")
plt.title('LinearRegression')

plt.subplot(2, 2, 2)
plt.hlines(0,0, len(ridge0001.coef_))
plt.plot(ridge0001.coef_, 's', label="Ridge alpha=0.0001")
plt.title('Ridge alpha=0.0001')

plt.subplot(2, 2, 3)
plt.hlines(0,0, len(ridge001.coef_))
plt.plot(ridge001.coef_, 's', label="Ridge alpha=0.001")
plt.title('Ridge alpha=0.001')

plt.subplot(2, 2, 4)
plt.hlines(0,0, len(ridge01.coef_))
plt.plot(ridge01.coef_, 's', label="Ridge alpha=0.01")
plt.title('Ridge alpha=0.01')
```

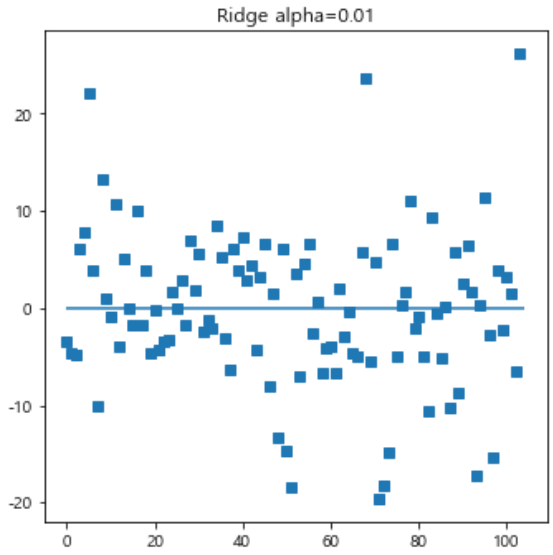
Out[19]:

```
Text(0.5, 1.0, 'Ridge alpha=0.01')
```


LinearRegression
1500
1000
500
0
-500
-1000
-1500
0
20
40
60
80
100

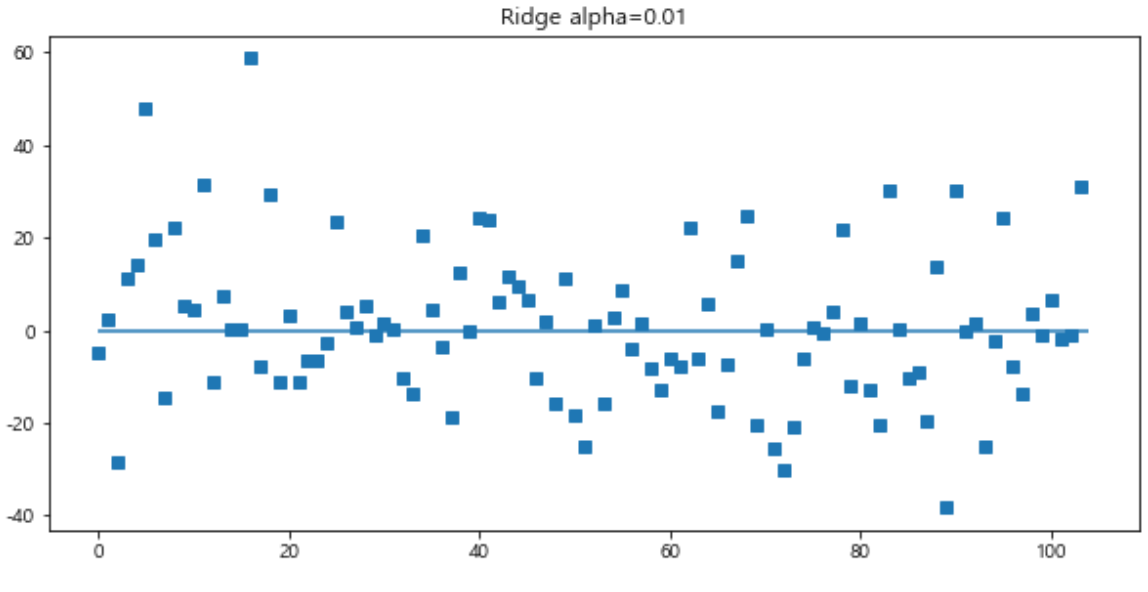

Ridge alpha=0.0001
150
100
50
0
-50
0
20
40
60
80
100

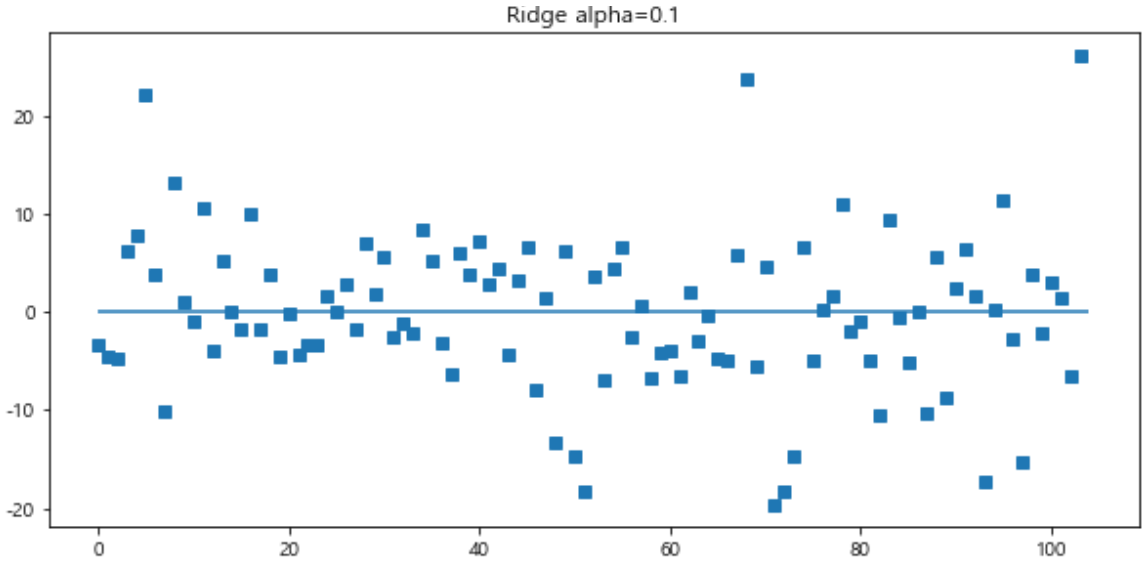

Ridge alpha=0.001
60
40
20
0
-20
-40
0
20
40
60
80
100

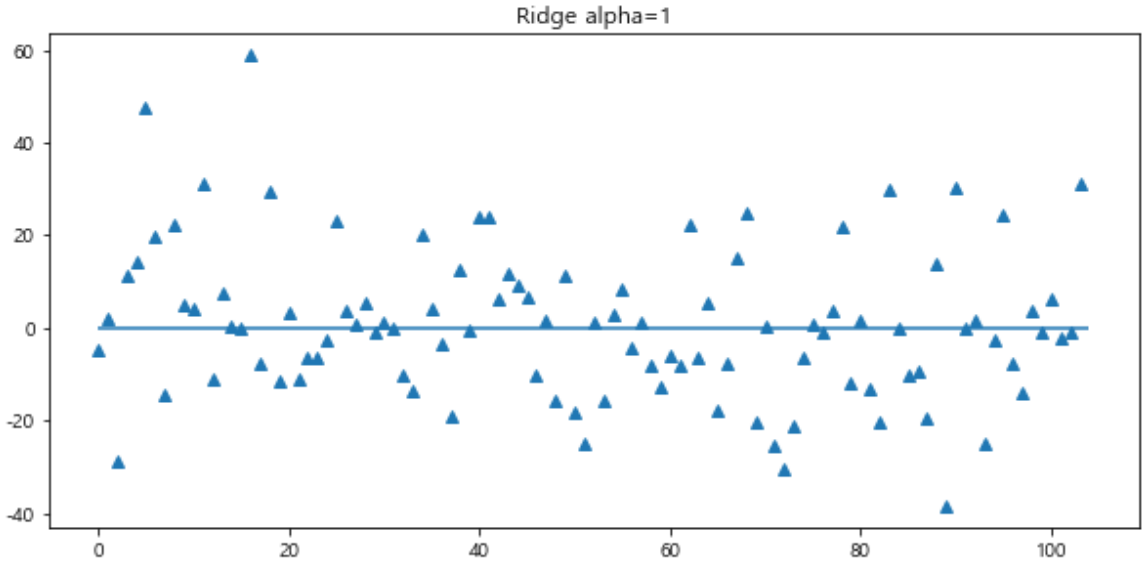

Ridge alpha=0.01
20
10
0
-10
-20
0
20
40
60
80
100

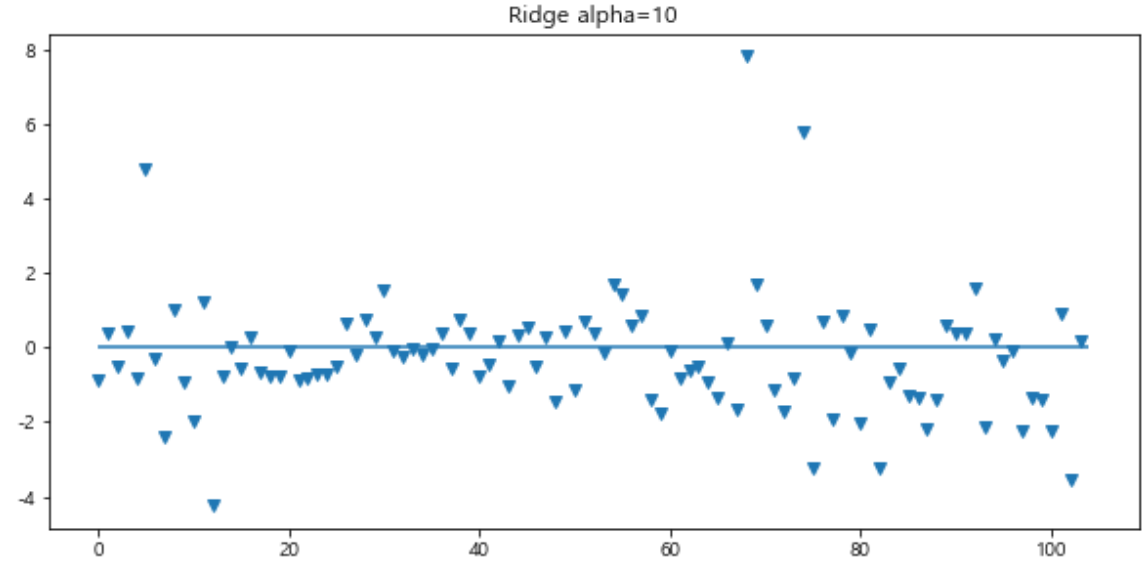
In [20]:

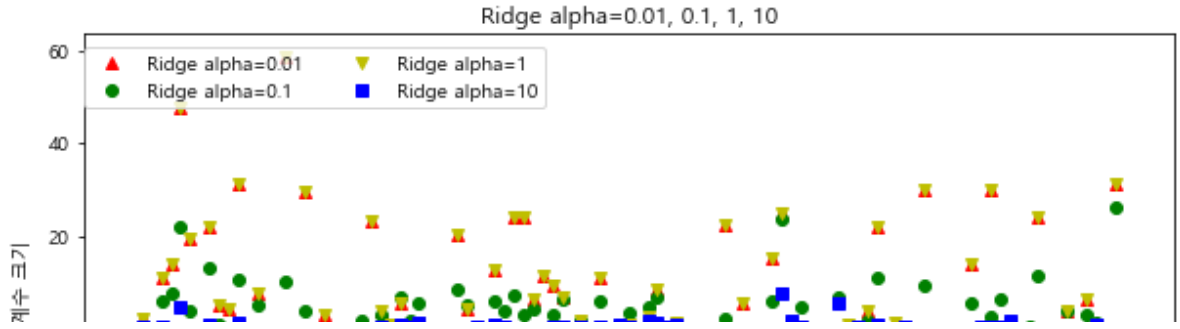
```
fig = plt.figure(figsize=(10,27))
#ax1 = fig.add_subplot(5, 1, 1)
#ax2 = fig.add_subplot(5, 1, 2)
#ax3 = fig.add_subplot(5, 1, 3)
#ax4 = fig.add_subplot(5, 1, 4)
#ax5 = fig.add_subplot(5, 1, 5)

plt.subplot(5, 1, 1)
plt.hlines(0,0, len(ridge001.coef_))
plt.plot(ridge001.coef_, 's', label="Ridge alpha=0.01")
plt.title('Ridge alpha=0.01')

plt.subplot(5, 1, 2)
plt.hlines(0,0, len(ridge01.coef_))
plt.plot(ridge01.coef_, 's', label="Ridge alpha=0.1")
plt.title('Ridge alpha=0.1')

plt.subplot(5, 1, 3)
plt.hlines(0,0, len(ridge.coef_))
plt.plot(ridge.coef_, '^', label="Ridge alpha=1")
plt.title('Ridge alpha=1')

plt.subplot(5, 1, 4)
plt.hlines(0,0, len(ridge10.coef_))
plt.plot(ridge10.coef_, 'v', label="Ridge alpha=10")
plt.title('Ridge alpha=10')

plt.subplot(5, 1, 5)
plt.hlines(0,0, len(ridge001.coef_))
plt.plot(ridge001.coef_, 'r^', label="Ridge alpha=0.01")
plt.plot(ridge01.coef_, 'go', label="Ridge alpha=0.1")
plt.plot(ridge.coef_, 'yv', label="Ridge alpha=1")
plt.plot(ridge10.coef_, 'bs', label="Ridge alpha=10")
plt.title('Ridge alpha=0.01, 0.1, 1, 10')

plt.xlabel("계수 목록")
plt.ylabel("계수 크기")
plt.legend(ncol=2, loc=(0,0.85))
plt.show()
```

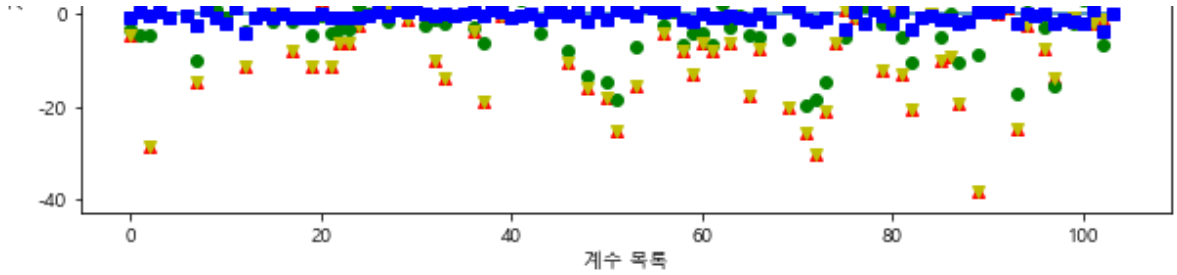



Ridge alpha=0.1


Ridge alpha=1


Ridge alpha=10


Ridge alpha=0.01, 0.1, 1, 10
Ridge alpha=0.01
Ridge alpha=0.1
Ridge alpha=1
Ridge alpha=10
계수 크기

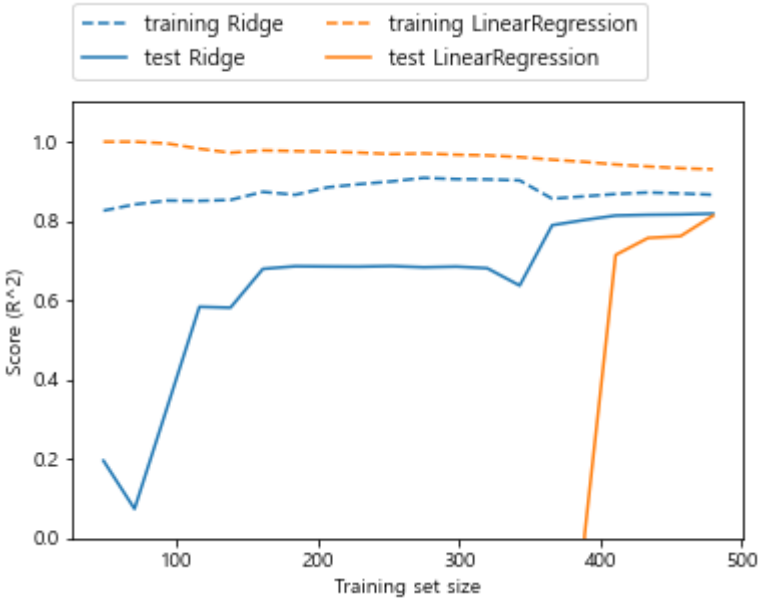


mglearn을 이용하여 훈련 데이터의 크기를 변화시키며 학습 곡선 확인해 보기

- alpha = 1

In [21]:

```
mglearn.plots.plot_ridge_n_samples()
```



- 모든 데이터 셋에서 TRAINING의 데이터 셋으로 모델 생성의 경우, 일반선형회귀의 r^2의 값이 높다.
- 단, **테스트 데이터 셋**에서는 모델은 비교시에 **릿지 회귀가 Score(r^2)의 값이 높다.**
- 테스트 셋에 대한 경우, 데이터가 많아지면 선형회귀 모델이 릿지 모델에 Score가 거의 가까워진다.
  - **충분한 데이터는 규제항이 덜 중요해져** 릿지 회귀와 선형회귀는 같아진다.

라쏘 회귀(Lasso) -릿지(Ridge)의 대안 (L1규제)

- 릿지 회귀에서와 같이 w(가중치-계수)의 모든 원소가 0에 가깝게 되길 원한다.(규제)
- 릿지 회귀와 달리 라쏘(Lasso)는 실제로 어떤 계수를 0으로 만든다.- **완전히 제외되는 특성이 발생**
- 라쏘 회귀의 규제 방식은 L1규제라고 하기도 한다.

In [22]:

```
display(Image(filename='img/linear_model02_lasso.png'))
```

$$J(\theta) = MSE(\theta) + \alpha \sum_{j=1}^{m} |\theta_i|$$

In [23]:

```
from sklearn.linear_model import Lasso
import numpy as np
```

In [24]:

```
lasso = Lasso().fit(X_train, y_train)
print("학습용 데이터 세트 점수 : {:.2f}".format(lasso.score(X_train, y_train)))
print("테스트 데이터 세트 점수 : {:.2f}".format(lasso.score(X_test, y_test)))
```

```
학습용 데이터 세트 점수 : 0.27
테스트 데이터 세트 점수 : 0.26
```

- 기본 라쏘 회귀의 score의 점수가 매우 낮다.

In [25]:

```
#  특성(feature)가 0이 아닌 것의 개수는?
print("사용한 특성의 수 : {:.2f}".format(np.sum(lasso.coef_ != 0)))
```

```
사용한 특성의 수 : 3.00
```

- 사용한 특성의 수가 매우 작음(3개)

라쏘의 alpha을 활용하여 살펴보기

In [26]:

```
lasso00001 = Lasso(alpha=0.0001, max_iter=100000).fit(X_train, y_train)
print("학습용 데이터 세트 점수 : ",lasso00001.score(X_train, y_train))
print("테스트 데이터 세트 점수 : ",lasso00001.score(X_test, y_test))
print("사용한 특성의 수 : ", np.sum(lasso00001.coef_ != 0))
```

```
학습용 데이터 세트 점수 :  0.9435815252488565
테스트 데이터 세트 점수 :  0.8080525356174253
사용한 특성의 수 :  95
```

In [27]:

```
lasso001 = Lasso(alpha=0.01, max_iter=100000).fit(X_train, y_train)
print("학습용 데이터 세트 점수 : ",lasso001.score(X_train, y_train))
print("테스트 데이터 세트 점수 : ",lasso001.score(X_test, y_test))
print("사용한 특성의 수 : ", np.sum(lasso001.coef_ != 0))
```

```
학습용 데이터 세트 점수 :  0.8864717420585476
테스트 데이터 세트 점수 :  0.8036004116583615
사용한 특성의 수 :  34
```

In [28]:

```
lasso01 = Lasso(alpha=0.1, max_iter=100000).fit(X_train, y_train)
print("학습용 데이터 세트 점수 : ",lasso01.score(X_train, y_train))
print("테스트 데이터 세트 점수 : ",lasso01.score(X_test, y_test))
print("사용한 특성의 수 : ", np.sum(lasso01.coef_ != 0))
```

```
학습용 데이터 세트 점수 :  0.7471467575228325
테스트 데이터 세트 점수 :  0.6986891802234085
사용한 특성의 수 :  12
```

In [29]:

```
lasso10 = Lasso(alpha=10, max_iter=100000).fit(X_train, y_train)
print("학습용 데이터 세트 점수 : ",lasso10.score(X_train, y_train))
print("테스트 데이터 세트 점수 : ",lasso10.score(X_test, y_test))
print("사용한 특성의 수 : ", np.sum(lasso10.coef_ != 0))
```

```
학습용 데이터 세트 점수 :  0.0
테스트 데이터 세트 점수 :  -0.03189647654769301
사용한 특성의 수 :  0
```

실습 1-4

Lasso에 alpha를 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10에 대한 학습용 데이터와 테스트용 데이터 셋의 결정계수의 값을 확인해 보자. 각각의 모델의 변수가 몇개씩 남는지?

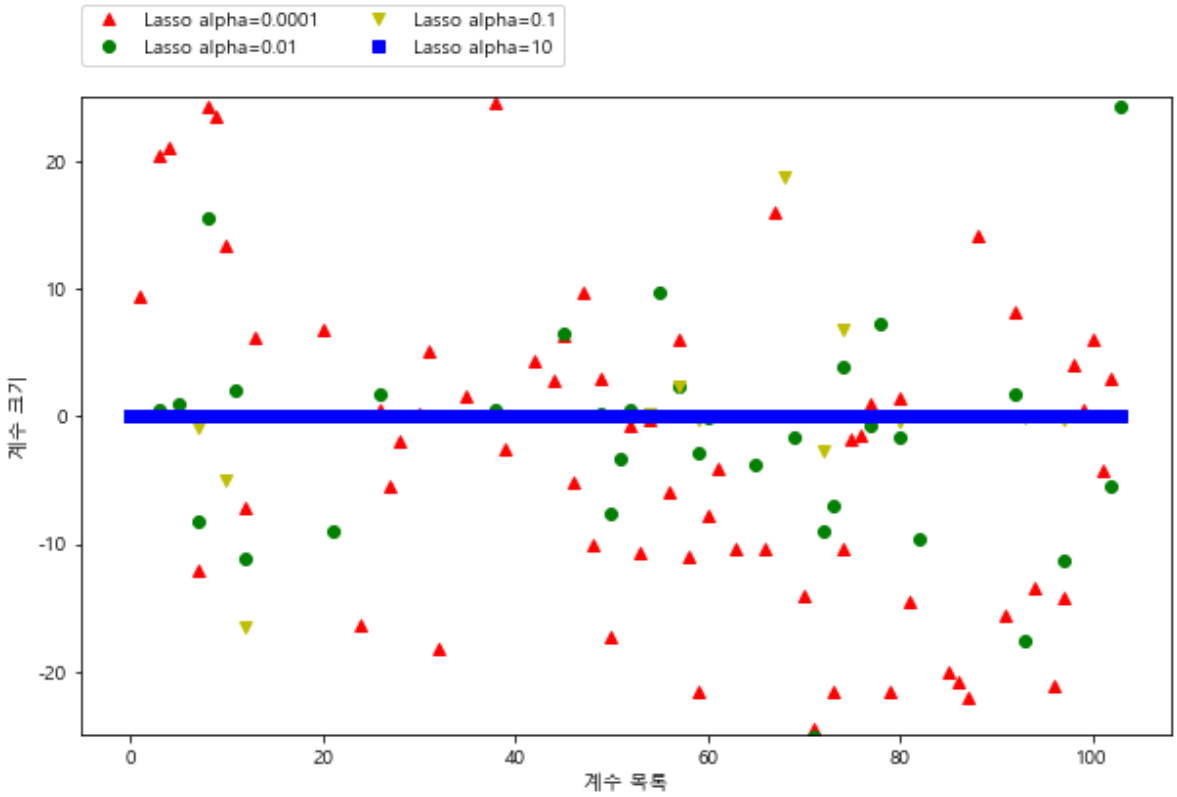
In [30]:

```
alpha_p = [0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10]

for p in alpha_p:
    lasso = Lasso(alpha=p).fit(X_train, y_train)
    tr_score = lasso.score(X_train, y_train)
    test_score = lasso.score(X_test, y_test)
    print("alpha : {} 학습 : {}, 테스트 : {}".format(p,tr_score, test_score))
    print("유효한 feature 개수 : ", np.sum(lasso.coef_ !=0))
```

```
alpha : 0.0001 학습 : 0.9374330725382051, 테스트 : 0.7764741268470517
유효한 feature 개수 :  102
alpha : 0.001 학습 : 0.9296864690381805, 테스트 : 0.8141500652221183
유효한 feature 개수 :  76
alpha : 0.01 학습 : 0.8865033777946089, 테스트 : 0.80359225764207
유효한 feature 개수 :  34
alpha : 0.1 학습 : 0.7471467575228325, 테스트 : 0.6986891802234085
유효한 feature 개수 :  12
alpha : 1 학습 : 0.26783778369518485, 테스트 : 0.2599232118344591
유효한 feature 개수 :  3
alpha : 10 학습 : 0.0, 테스트 : -0.03189647654769301
유효한 feature 개수 :  0

C:₩Users₩toto₩anaconda3₩lib₩site-packages₩sklearn₩linear_model₩_coordinate_descent.p
y:529: ConvergenceWarning: Objective did not converge. You might want to increase th
e number of iterations. Duality gap: 1061.5581359471444, tolerance: 3.36103762532981
5
  model = cd_fast.enet_coordinate_descent(
C:₩Users₩toto₩anaconda3₩lib₩site-packages₩sklearn₩linear_model₩_coordinate_descent.p
y:529: ConvergenceWarning: Objective did not converge. You might want to increase th
e number of iterations. Duality gap: 864.3796550250048, tolerance: 3.361037625329815
  model = cd_fast.enet_coordinate_descent(
C:₩Users₩toto₩anaconda3₩lib₩site-packages₩sklearn₩linear_model₩_coordinate_descent.p
y:529: ConvergenceWarning: Objective did not converge. You might want to increase th
e number of iterations. Duality gap: 6.848133364149362, tolerance: 3.361037625329815
  model = cd_fast.enet_coordinate_descent(
```

In [31]:

```
lasso = Lasso(alpha=1).fit(X_train, y_train)

plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(lasso00001.coef_, "r^", label="Lasso alpha=0.0001")
plt.plot(lasso001.coef_, 'go', label="Lasso alpha=0.01")
plt.plot(lasso01.coef_, 'yv', label="Lasso alpha=0.1")
plt.plot(lasso10.coef_, "bs", label="Lasso alpha=10")

plt.xlabel("계수 목록")
plt.ylabel("계수 크기")
plt.ylim(-25, 25)
plt.legend(ncol=2, loc=(0,1.05))
plt.show()
```



- alpha가 적어지면 적어질수록 규제를 받지 않는 모델이 된다.
- 실제의 경우는 보통 릿지 회귀를 선호함.
- 만약 특성이 많고 일부부만 중요하다면 Lasso가 좋은 선택

도전 실습 - 나만의 데이터 셋 선택하기

- 1-1 리지 모델을 적용해 보자.
- 1-2 라소 모델을 적용해 보자.
- 1-3 입력을 정규화를 하여 리지, 라소를 적용해 보자.
- 1-4 PolynomialFeatures를 이용하여 새로운 feature를 생성 후, 리지, 라소를 적용해 보자.
- 1-5 모델을 개선시켜 보자.

REF

- Ridge와 Lasso : http://statweb.stanford.edu/~tibs/sta305files/Rudyregularization.pdf (http://statweb.stanford.edu/~tibs/sta305files/Rudyregularization.pdf)